Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2003-2004

CIMP, PHYSIQUE

Épreuve 3 de CONTRÔLE CONTINU, en SECTION B

21 Janvier 2003

Durée : 1 h

A. Questions de cours (4 points)

Fonction de transfert d'un filtre électrique passif passe-bas, type RC : schéma du filtre, justification du qualificatif passe-bas, expression de la fonction de transfert $\underline{T}(f)$, de son module et de sa phase.

B. Problème (16 points)

Conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras

Pendules simples et solitons

On considère un pendule simple OA, de masse $m = 0,02$ kg et de longueur $l = 0,1$ m, dans le champ de pesanteur terrestre $\mathbf{g} = g\,\mathbf{e}_x$, avec $g = 9,81$ m.s^{-2}, $\mathbf{e}_x$ étant la verticale descendante.

1. a) Exprimer, en fonction de l'angle θ que fait $\mathbf{OA}$ avec $\mathbf{e}_x$, ou de ses dérivées par rapport au temps, l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ du pendule, ainsi que son énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p$, l'origine de cette dernière étant prise pour $\theta = \pi/2$.

b) Représenter graphiquement la fonction $\mathcal{E}_p(\theta)$. Discuter qualitativement la nature du mouvement pour différentes valeurs de l'énergie mécanique comparées à l'énergie mgl.

c) Sachant que l'on néglige l'influence des forces de frottement, établir, à l'aide du théorème de l'énergie mécanique, l'équation différentielle à laquelle satisfait le mouvement. En déduire, l'équation différentielle du deuxième ordre correspondante. Que devient cette équation dans le cas des petits mouvements, définis par $\sin\theta \approx \theta$?

d) Calculer la pulsation propre ω_0 des petites oscillations du pendule simple, ainsi que la période propre correspondante. Quelle est l'influence de la valeur de la masse ? Commenter.

2. Le long d'une corde métallique horizontale Ox, on suspend, à intervalles réguliers, N pendules, identiques au précédent (Fig. 1). Chacun des pendules transmet à la corde un angle de torsion égal à l'angle θ qu'il fait avec la verticale. L'analyse montre que θ satisfait à l'équation différentielle suivante, notée ESG (Équation Sine-Gordon) :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = k_0^2 \sin\theta \quad \text{avec} \quad k_0^2 = \frac{\omega_0^2}{v_0^2}$$

Fig. 1

T.S.V.P.

a) Montrer que ESG se réduit à son premier membre en l'absence de pendules. Quelle est alors la signification physique de l'équation ? En unité SI, $v_0 = 0,6$; de quelle unité s'agit-il ? Commenter cette valeur en rappelant l'ordre de grandeur de la vitesse de propagation des ondes acoustiques le long d'une corde métallique. Calculer k_0 en précisant son unité SI.

b) Que devient ESG pour $\theta \ll 1$? Vérifier que l'équation complexe associée à ESG admet alors une solution d'expression :

$$\underline{\theta} = \theta_m \exp[-i(\omega t - kx)]$$

Quelle est la signification physique de cette solution ? À quelle relation, dite de dispersion, doivent satisfaire ω et k. Préciser la nature du graphe donnant ω/ω_0 en fonction de k/k_0.

c) La solution exacte (réelle au sens mathématique) de ESG est :

$$\tan\left[\frac{\theta(s)}{4}\right] = \exp(\pm\gamma s) \quad \text{avec} \quad s = \omega_0\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{et} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^{-1/2}$$

On appelle soliton le phénomène physique que décrit une telle solution. Le signe plus dans l'argument de l'exponentielle correspond à un soliton de torsion, le signe moins à un soliton d'antitorsion. Donner la signification physique de v, ainsi que sa valeur limite.

Constantes fondamentales de la physique

$G = 6,672\,59 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}, constante de gravitation,

$c = 2,997\,924\,58 \times 10^8$ m.s^{-1}, vitesse de la lumière dans le vide (valeur exacte),

$h = 6,626\,068\,76(52) \times 10^{-34}$ J.s, constante de Planck,
$\hbar = 1,054\,571\,596(82) \times 10^{-34}$ J.s constante de Planck divisée par 2π

$e = 1,602\,176\,462\,(63) \times 10^{-19}$ C, charge élémentaire (charge de l'électron : $-e$),

$m_e = 0,910\,938\,188(72) \times 10^{-30}$ kg, masse de l'électron,
$m_e c^2 = 0,510\,998$ MeV $\approx 0,511$ MeV

$m_p = 1,672\,621\,58(13) \times 10^{-27}$ kg, masse du proton,
$m_p c^2 = 938,272$ MeV

$k_B = 1,380\,650\,3(24) \times 10^{-23}$ J.K^{-1}, constante de Boltzmann,

$N_A = 6,022\,141\,99(47) \times 10^{23}$ mol^{-1}, nombre d'Avogadro,

$R = N_A k_B = 8,314\,472(15)$ J.mol^{-1}. K^{-1}, constante des gaz parfaits,

$F = N_A e = 96\,485,341\,5(39)$ C.mol^{-1}, le faraday,

$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,817 \times 10^{-12}$ F.m^{-1} constante de la loi de Coulomb (valeur exacte)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1} perméabilité du vide (valeur exacte)

$q_e^2 \equiv e^2/(4\pi\varepsilon_0) = 230,707\,705\,6 \times 10^{-30}$ SI

$r_e = q_e^2/(m_e c^2) = 2,817\,934\,23 \times 10^{-15}$ m, rayon classique de l'électron ($r_e \approx 2,8$ fm)

$\alpha = q_e^2/(\hbar c) = 7,297\,352\,533(27) \times 10^{-3} \approx 1/137,036$, constante de structure fine.

$\Phi_0 = h/(2e) = 2,067\,833\,636(81) \times 10^{-15}$ Wb quantum de flux magnétique

$R_K = h/e^2 = 25\,812,807\,572(95)$ Ω, constante de von Klitzing.

$\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 927,400\,899(37) \times 10^{-26}$ J.T^{-1}, magnéton de Bohr

$\mu_N = e\hbar/(2m_p) = 5,050\,783\,17(20) \times 10^{-27}$ J.T^{-1} magnéton nucléaire.